Exercice 1 :

Donnez tous les sous-ensembles de l'ensemble {a; b; c}.

{ a ; b}, { a ; c}, { c ; b}, { a }, { b}, { c}, {∅}

Exercice 2 :

Soit U = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}, A = {l; 2; 3; 4}, B = {3; 4; 5}, C = {2; 3; 4; 5; 6}.

Calculez

1. $A \cup B$ = {l; 2; 3; 4 ; 5}
2. $A \cap B$ = { 3 ; 4}
3. A^C = { 5 ; 6 ; 7}
4. $(A \cup B) \cap C$ = { 2; 3; 4 ; 5}
5. $(A \cup B) \cup C$ = {1; 2; 3; 4; 5; 6 }
6. $A^C \cup B \cup C$ = {2; 3; 4; 5; 6; 7}

Exercice 3 :

Soit U l'ensemble universel constitué par l'ensemble de tous les étudiants qui suivent des cours à l'Université de Hawaï et

B = { x | x suit actuellement un cours de commerce }

E = { x | x suit actuellement un cours d'anglais }

M = { x | x suit actuellement un cours de mathématiques }

Écrivez une expression utilisant les opérations sur les ensembles et montrez la région avec des dessins pour chacun des éléments suivants :

1. L'ensemble des étudiants de l'université d'Hawaii qui suivent un cours dans au moins un des trois domaines ci-dessus.

   $B \cup E \cup M$

2. L'ensemble de tous les étudiants de l'Université d'Hawaï qui suivent à la fois un cours d'anglais et un cours de mathématiques, mais pas un cours de commerce.

   $E \cap M \cap B^C$

3. L'ensemble de tous les étudiants de l'Université de Hawaii qui suivent un cours dans exactement un des trois domaines ci-dessus.

   $(B \cap (E \cup M)^C) \cup (E \cap (B \cup M)^C) \cup (M \cap (B \cup E)^C)$

   Ou

   $(E \cap M)^C \cup (B \cap M)^C \cup (B \cap E)^C$

Exercice 4 :

Soit U l'ensemble de toutes les entreprises de ce pays et P celles qui ont réalisé des bénéfices au cours de la dernière année, D celles qui ont versé un dividende au cours de la dernière année et L celles qui ont augmenté leur main-d'œuvre au cours de la dernière année.

Décrire ce qui suit en utilisant les trois ensembles P, D, L, et les opérations sur les ensembles. Montrez les régions dans un dessin.

1. Les entreprises de ce pays qui ont réalisé des bénéfices et versé des dividendes l'année dernière.
   $P \cap D$
2. Les entreprises de ce pays qui ont réalisé des bénéfices ou versé un dividende l'année dernière.
   $P \cup D$
3. Les entreprises de ce pays qui n'ont pas réalisé de bénéfices l'année dernière.
   P^C
4. Les entreprises de ce pays qui ont réalisé des bénéfices, versé un dividende et n'ont pas augmenté leur main-d'œuvre l'année dernière.
   $P \cap D \cap L^C$
5. Les entreprises de ce pays qui ont réalisé des bénéfices ou versé un dividende et qui n'ont pas augmenté leur main-d'œuvre l'année dernière.
   $(P \cup D) \cap L^C$

Exercice 5 :

Pour tout couple d'ensembles finis A et B, pourquoi a-t-on ?

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

où $|A|$ dénote le nombre d'éléments que contient A.

$$|A \cup B| = |A| + |B \cap A^C| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Exercice 6 :

Dans une enquête menée auprès de 120 adultes,

- ✓ 55 ont déclaré avoir mangé un œuf au petit-déjeuner ce matin-là,
- ✓ 40 ont déclaré avoir bu du jus de fruit au petit-déjeuner
- ✓ 70 ont déclaré avoir mangé un œuf ou du jus de fruit au petit-déjeuner.

$|\text{œuf}| = 55$ $\quad$ $|\text{jus de fruit}| = 40$ $\quad$ $|\text{œuf} \cup \text{jus de fruit}| = 70$

D'après la formule de l'exercice précédent

$$|\text{œuf} \cap \text{jus de fruit}| = |\text{œuf}| + |\text{jus de fruit}| - |\text{œuf} \cup \text{jus de fruit}|$$

$$= 55 + 40 - 70 = 25$$

1. Combien d'entre eux ont pris un œuf mais pas de jus de fruit au petit-déjeuner ?
   $|\text{œuf} \cap \text{jus de fruit}^C| = |\text{œuf}| - |\text{œuf} \cap \text{jus de fruit}| = 30$
2. Combien d'entre eux n'ont pris ni œuf ni jus de fruit au petit-déjeuner ?
   $120 - |\text{œuf} \cup \text{jus de fruit}| = 120 - 70 = 50$

Exercice 7 :

Une enquête menée auprès de 200 personnes qui venaient de rentrer d'un voyage en Europe a permis de recueillir les informations suivantes.

- ✓ 142 ont visité l'Angleterre
- ✓ 95 ont visité l'Italie
- ✓ 65 ont visité l'Allemagne
- ✓ 70 ont visité l'Angleterre et l'Italie
- ✓ 50 ont visité l'Angleterre et l'Allemagne
- ✓ 30 personnes ont visité l'Italie et l'Allemagne
- ✓ 20 ont visité ces trois pays

Combien sont allés en Angleterre mais pas en Italie ni en Allemagne ?

$|\text{Angleterre}| = 142 \qquad |\text{Italie}| = 95 \qquad |\text{Allemagne}| = 65$

$|\text{Angleterre} \cap \text{Italie}| = 70 \qquad |\text{Angleterre} \cap \text{Allemagne}| = 50 \qquad |\text{Italie} \cap \text{Allemagne}| = 30$

$|\text{Angleterre} \cap \text{Italie} \cap \text{Allemagne}| = 20$

$|\text{Angleterre} \cup \text{Italie} \cup \text{Allemagne}| = |\text{Angleterre}| + |\text{Italie}| + |\text{Allemagne}| - |\text{Angleterre} \cap \text{Italie}| - |\text{Angleterre} \cap \text{Allemagne}| - |\text{Italie} \cap \text{Allemagne}| + |\text{Angleterre} \cap \text{Italie} \cap \text{Allemagne}|$

$\Leftrightarrow |\text{Angleterre} \cup \text{Italie} \cup \text{Allemagne}| = 142 + 95 + 65 - 70 - 50 - 30 + 20 = 172$

$|\text{Angleterre} \cap \text{Italie}^C \cap \text{Allemagne}^C|$

$= |\text{Angleterre} \cup \text{Italie} \cup \text{Allemagne}| - |\text{Italie} \cup \text{Allemagne}| = |\text{Angleterre}| - |\text{Italie}| - |\text{Allemagne}| + |\text{Italie} \cap \text{Allemagne}|$

$= 172 - 95 - 65 + 30 = 42$

Ou

$= |\text{Angleterre}| - |\text{Angleterre} \cap \text{Italie}| - |\text{Angleterre} \cap \text{Allemagne}| + |\text{Angleterre} \cap \text{Italie} \cap \text{Allemagne}|$

$= 142 - 70 - 50 + 20 = 42$

Exercice 8 :

On considère 15 personnes pour un sondage. Elles entendent la réponse de la personne précédente dans la file et donc l'ordre est important.

— Combien de manières d'ordonner les personnes sondées sont possibles ?

— Combien de manières d'extraire 4 personnes parmi ces 15 sont possibles ?

— Combien de manières d'extraire 4 personnes en tenant compte de l'ordre de leur présentation sont possibles ?

- $A_{15}^{15} = P_{15} = 15! = 1\,307\,674\,368\,000$

- $\binom{4}{15} = C_{15}^{4} = \frac{15!}{4!(15-4)!} = \frac{15!}{4!11!} = \frac{15\times14\times13\times12}{4\times3\times2} = \frac{32760}{24} = 1365$

- $A_{15}^{4} = \frac{15!}{(15-4)!} = \frac{15!}{11!} = 15 \times 14 \times 13 \times 12 = 32760$

Exercice 9 :

1. Donnez la limite lorsque x tend vers 0 de

$$\frac{1}{(1 + x)}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{(1 + x)} = 1$$

2. Donnez la limite lorsque x tend vers 1 de

$$e^{-\frac{1}{1-x^2}}$$

$$\lim_{x\to1^-} e^{-\frac{1}{1-x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to1^+} e^{-\frac{1}{1-x^2}} = +\infty$$

3. Donnez la limite lorsque x tend vers +∞ de

$$\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

4. Donner la limite lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures de

$$sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to0^+} sin\left(\frac{1}{x}\right) = [-1\,;1]$$

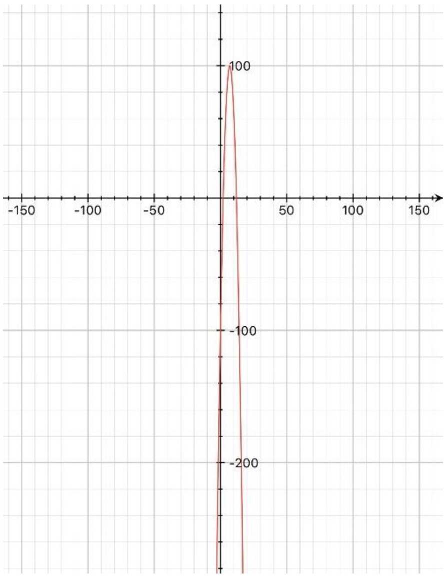
fonction	dérivée
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
u/v	$(vu'-uv')/v^2$
$u\circ v$	$v'(u'\circ v)$
$1/u$	$-u'/u^2$
$\sqrt{u}$	$u'/(2\sqrt{u})$
u^α	$\alpha u^{\alpha-1}u'$
u^{-1}	$1/(u'\circ u^{-1})$

Exercice 10 :

On considère les fonctions f dérivables sur l'intervalle *I* indiqué. Dans chacun des cas, représentez le graphe de la fonction (on pourra utiliser Wolfram Alpha online) et déterminer f'(x).

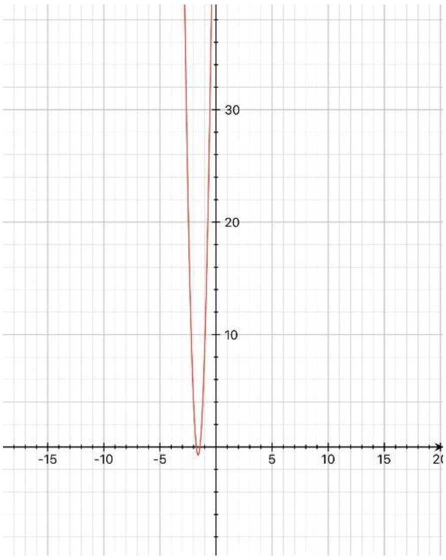
1. $f(x) = -4x^2 + 56x - 96, \quad I = \mathbb{R}$

$f'(x) = -8x + 56$



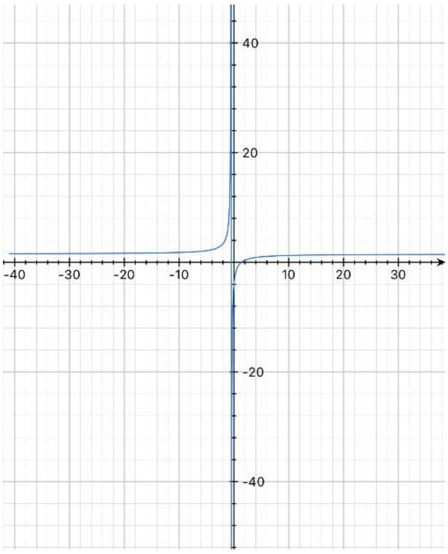
2. $f(x) = (4x + 7)(7x + 10), \quad I = \mathbb{R}$

$f'(x) = 7(4x + 7) + 4(7x + 10)$
$= 28x + 49 + 28x + 40 = 56x + 89$



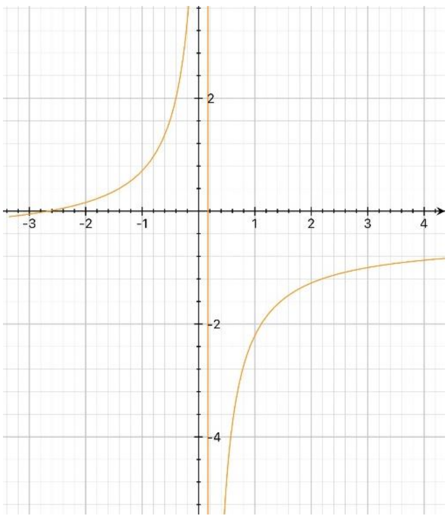
3. $f(x) = \frac{3x-4}{2x+1}, \quad I = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$f'(x) = \dfrac{3(2x+1) - 2(3x-4)}{(2x+1)^2} = \dfrac{11}{(2x+1)^2}$



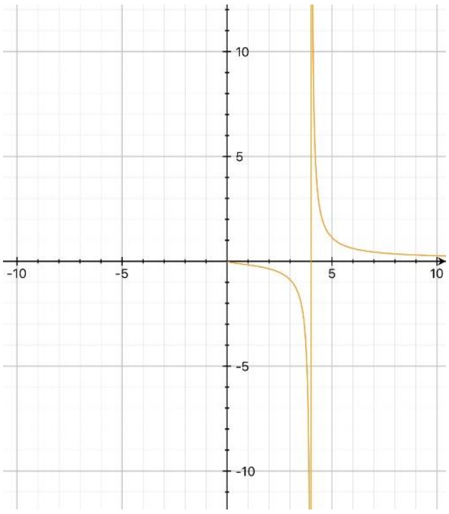
4. $f(x) = \frac{8+3x}{1-6x}, \quad I = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{6}\right\}$

$f'(x) = \dfrac{3(1-6x) + 6(8+3x)}{(1-6x)^2} = \dfrac{51}{(1-6x)^2}$



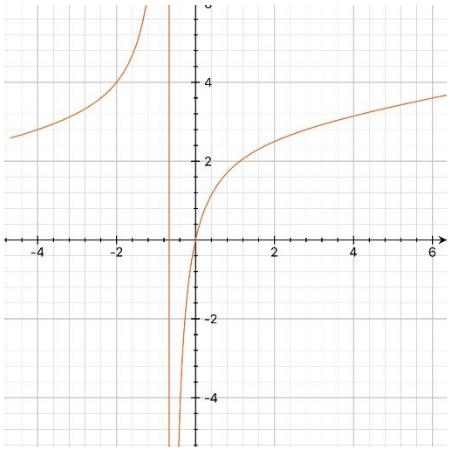
5. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x-8}$, $\quad I = \mathbb{R}^{+} - \{4\}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x-8) - 2\sqrt{x}}{(2x-8)^2} = \frac{\frac{-8}{2\sqrt{x}}}{(2x-8)^2}$$



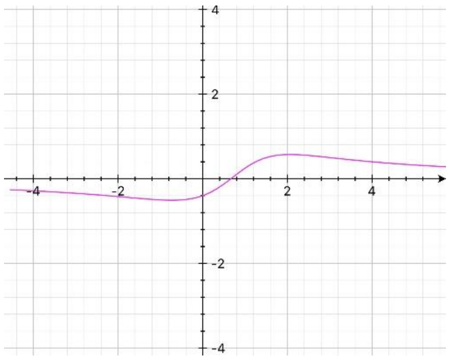
6. $f(x) = \frac{x^2+18x}{6x+4}$, $\quad I = \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

$$f'(x) = \frac{(2x+18)(6x+4) - 6(x^2+18x)}{(6x+4)^2}$$
$$= \frac{12x^2 + 8x + 108x + 72 - 6x^2 - 108x}{(6x+4)^2}$$
$$= \frac{6x^2 + 8x + 72}{(6x+4)^2}$$



7. $f(x) = \frac{3x-2}{2x^2-3x+5}$, $\quad I = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$$f'(x) = \frac{3(2x^2-3x+5) - (4x-3)(3x-2)}{(2x^2-3x+5)^2}$$
$$= \frac{6x^2 - 9x + 15 - 12x^2 + 17x - 6}{(2x^2-3x+5)^2}$$
$$= \frac{-6x^2 + 8x + 9}{(2x^2-3x+5)^2}$$



Exercice 11 :

Soit f la fonction définie sur R par

$$f(x) = \frac{10x+4}{5x^2+1}$$

1. Déterminer pour tout x є $\mathbb{R}$ l'expression de f'(x), où f' désigne la fonction dérivée de f.

$$f'(x) = \frac{10(5x^2+1) - 10x(10x+4)}{(5x^2+1)^2} = \frac{50x^2 + 10 - 100x^2 - 40x}{(5x^2+1)^2} = \frac{-50x^2 - 40x + 10}{(5x^2+1)^2}$$

2. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.

Calculons le signe de $-50x^2 - 40x + 10$

$$\Delta = (-40)^2 - 4 \times (-50) \times 10 = 1600 + 2000 = 3600$$

$$x_1 = \frac{40+60}{-100} = -1 \qquad x_2 = \frac{40-60}{-100} = \frac{2}{10}$$

Donc $-50x^2 - 40x + 10 < 0 \quad si\ x \in]-\infty\ ;\ -1[\cup \left]\frac{2}{10}\ ;\ +\infty\right[$

et $-50x^2 - 40x + 10 > 0 \quad si\ x \in \left]-1\ ; \frac{2}{10}\right[$

comme $(5x^2+1)^2 \geq 0$

Alors

Donc $f'(x) < 0$ $\quad si\ x \in]-\infty\,;\ -1[\cup \left]\frac{2}{10}\ ;\ +\infty\right[$, f(x) est décroissant sur cet intervalle

et $f'(x) > 0$ $\quad si\ x \in \left]-1\,;\frac{2}{10}\right[$, f(x) est croissant sur cet intervalle

3. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentant f au point A d'abscisse 0 .

$$Y = f'(0)(\,x - 0) + f(0)$$
$$Y = 10x + 4$$

4. Étudier la position relative de cette tangente et de la courbe représentant la fonction f.

$Soit\ \ g(x) = f(x) - (10x + 4$

Etudions le signe de g(x)

$$g(x) = \frac{10x + 4}{5x^2 + 1} - 10x - 4 = \frac{10x + 4}{5x^2 + 1} - \frac{(10x + 4)(5x^2 + 1)}{5x^2 + 1} = \frac{10x + 4 - 50x^3 - 20x^2 - 10x - 4}{5x^2 + 1}$$
$$= \frac{-50x^3 - 20x^2}{5x^2 + 1} = -x^2\frac{50x + 20}{5x^2 + 1}$$

$$50x + 20 > 0 \Leftrightarrow 50x > -20 \ \Leftrightarrow x > -\frac{2}{5}$$

quand $x\ < -\frac{2}{5}$, g(x) > 0 donc f(x) est au-dessus de la tangente

quand $x > -\frac{2}{5}$, g(x) < 0 donc f(x) est au-dessous de la tangente

Exercice 12 :

Vérifier que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle donné.

1. $sur\ \mathbb{R} :\ f(x) = (3x + 1)^2 \quad et \quad F(x) = 3x^3 + 3x^2 + x$

$$f(x) = 9x^2 + 6x + 1 \qquad\qquad F'(x) = 9x^2 + 6x + 1$$

2. $sur\ ]0; +1[: f(x) = \frac{2(x^4-1)}{x^3} \quad et \quad F(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

$$F'(x) = 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 2\left(x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = 2\left(x - \frac{1}{x^3}\right) = 2\left(\frac{x^4 - 1}{x^3}\right) = f(x)$$

Exercice 13 :

Trouver les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle I considéré.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 1 \qquad sur\ I = \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + c$$

2. $f(x) = \frac{-2}{\sqrt{x}} \qquad sur\ I =]0\,; +\infty[$

$$F(x) = -2 \times 2 \times \sqrt{x} = -4\sqrt{x} + c$$

3. $f(x) = \frac{2}{x^3} \qquad sur\ I =]0\,; +\infty[$

$$F(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times x^{-2} = -\frac{1}{x^2} + c$$

Exercice 14 :

Trouver la primitive F de f sur I telle que F (x_0) = y_0

1. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ $\quad I =]0\,;+\infty[\quad et\ x_0 = 1\,, y_0 = 5$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + c$$
$$5 = \frac{1}{2}1^2 - \frac{1}{1} + c \quad \Leftrightarrow c = \frac{11}{2}$$
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + \frac{11}{2}$$

2. $f(x) = x^2 - 2x - \frac{1}{2}$ $\quad I = \mathbb{R} \quad et\ x_0 = 1\,, y_0 = 0$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + c$$
$$0 = \frac{1}{3}1^3 - 1^2 - \frac{1}{2}1 + c \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{7}{6}$$
$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{7}{6}$$

3. $f(x) = \frac{3x-1}{x^3}$ $\quad I =]0\,;+\infty[\quad et\ x_0 = 3\,, y_0 = 2$

$$f(x) = \frac{3x-1}{x^3} = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}$$
$$F(x) = -\frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2} + c$$
$$2 = -\frac{3}{3} + \frac{1}{2 \times 3^2} + c \quad \Leftrightarrow \quad c = 3 + \frac{1}{18} = \frac{55}{18}$$
$$F(x) = -\frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{55}{18}$$

Exercice 15 :

Calculer

$$\int_2^3 f(x)dx$$

Pour toutes les fonctions f des exercices précédents.

Exercice 14 (suite) :

1. $$\int_2^3 x + \frac{1}{x^2}dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}\right]_2^3 = \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{25}{6} - \frac{9}{6} = \frac{8}{3}$$

2. $$\int_2^3 x^2 - 2x - \frac{1}{2}dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x\right]_2^3 = \left(9 - 9 - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{8}{3} - 4 - 1\right) = -\frac{3}{2} + \frac{7}{3} = \frac{5}{6}$$

3. $\int_2^3 \frac{3x-1}{x^3}\,dx = \int_2^3 \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\,dx = \left[-\frac{3}{x} + \frac{1}{2x^2}\right]_2^3 = \left(-1 + \frac{1}{18}\right) - \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{8}\right) = -\frac{17}{18} + \frac{11}{8} = \frac{31}{72}$

Exercice 13 (suite) :

1. $\int_2^3 x^2 - 3x + 1\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x\right]_2^3 = \left(9 - \frac{27}{2} + 3\right) - \left(\frac{8}{3} - 6 + 2\right) = -\frac{3}{2} + \frac{4}{3} = -\frac{1}{6}$

Comme la fonction est positive puis négative sur l'intervalle on décompose le calcul d'intégral.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 = 5$$

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \simeq 0{,}38 \qquad x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \simeq 2{,}62$$

$$\int_2^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} x^2 - 3x + 1\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x\right]_2^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \simeq -0{,}35$$

$$\int_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}^3 x^2 - 3x + 1\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x\right]_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}^3 \simeq +0{,}18$$

2. $\int_2^3 \frac{-2}{\sqrt{x}}\,dx = \left[-4\sqrt{x}\right]_2^3 = -4\sqrt{3} + 4\sqrt{2} = -1{,}27$

3. $\int_2^3 \frac{2}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_2^3 = -\frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{5}{36}$

Exercice 16 :

On a représenté ci-dessous (figure 1), dans le plan muni d'un repère orthonormal, la courbe représentative C d'une fonction f définie sur l'intervalle [0; 20].

Par lecture graphique : Déterminer un encadrement, d'amplitude 4 , par deux nombres entiers de

$$I = \int_4^8 f(x)dx$$

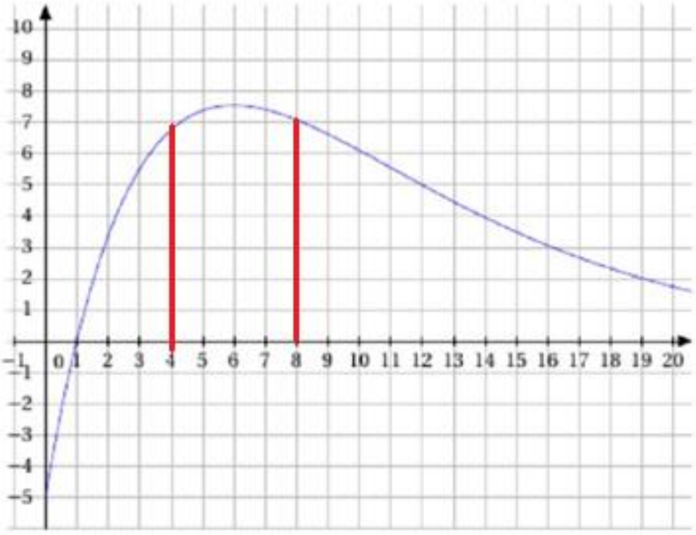


FIGURE 1 – Une fonction à intégrer dans l'Exercice 16

$I = [27\,;31]$